7.4.10 Výpočty vzdáleností II

Předpoklady: 7409

Př. 1: Urči vzdálenost přímek $p:\{[2-t;1+2t;-2+t],t\in R\}$ a $q:\{[-1+2t;1-t;-2+3t],t\in R\}$ od roviny $\rho: x-y-z+3=0$.

Vzdálenost přímky od roviny určujeme jen v případě, že přímka je s rovinou rovnoběžná $\Rightarrow$ zjistíme, zda jsou přímky s rovinou rovnoběžné.

$\boldsymbol{n}_\rho=(1;-1;-1)$ $\boldsymbol{u}_p=(-1;2;1)$ $\boldsymbol{u}_q=(2;-1;3)$

Je přímka *p* rovnoběžná s rovinou ρ?

$\boldsymbol{n}_\rho\cdot\boldsymbol{u}_p=(1;-1;-1)(-1;2;1)=1\cdot(-1)+(-1)\cdot2+(-1)\cdot1=-4$ $\Rightarrow$ ***p* není rovnoběžná s ρ.**

Je přímka *q* rovnoběžná s rovinou ρ?

$\boldsymbol{n}_\rho\cdot\boldsymbol{u}_q=(1;-1;-1)(2;-1;3)=1\cdot2+(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot3=0$ $\Rightarrow$ ***q* je rovnoběžná s ρ.**

Vzdálenost přímky od roviny = vzdálenost libovolného bodu přímky od roviny.

Bod na přímce *q*: $Q[-1;1;-2]$.

Dosadíme do vzorce $d=\dfrac{|ap_1+bp_2+cp_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|1\cdot(-1)+(-1)\cdot1+(-1)(-2)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt3}=\sqrt3$.

Přímka *q* je od roviny ρ vzdálena $\sqrt3$.

Př. 2: Na ose *y* najdi bod *Y*, který je stejně vzdálen od bodů $A[-1;3;-5]$ a $B[3;1;1]$.

Bod *Y* leží na ose *y* $\Rightarrow$ jeho souřadnice: $Y[0;y;0]$.

Jeho vzdálenost od bodů je *A* a *B* je stejná $\Rightarrow$ $|AY|=|BY|$.

Dosadíme: $\sqrt{(-1-0)^2+(3-y)^2+(-5-0)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(1-y)^2+(1-0)^2}$ $\quad /^2$

$1+(9-6y+y^2)+25=9+(1-2y+y^2)+1$

$1+9-6y+y^2+25=9+1-2y+y^2+1$

$24=4y$

$y=6$

Podmínky zadání splňuje bod $Y[0;6;0]$.

Jiný postup:

Množina bodů, která jsou stejně vzdáleny od bodů *A* a *B* tvoří v prostoru rovinu, která je kolmá na úsečku *AB* a prochází jejím středem. Hledaný bod najdeme jako průsečík této roviny s osou *y*.

Střed úsečky *AB*: $S_{AB}[1;2;-2]$

Vektor $B-A=(4;-2;6)\Rightarrow\boldsymbol{n}_\rho=(2;-1;3)$

Rovnice roviny ρ: $2x-y+3z+d=0$.

Prochází bodem S_{AB}: $2x-y+3z+d=2\cdot1-2+3\cdot(-2)+d=0\Rightarrow d=6$

Rovina $\rho: 2x - y + 3z + 6 = 0$.
Upravíme na úsekový tvar: $2x - y + 3z = -6 \quad / : (-6)$.
$\frac{x}{-3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{-2} = 1$
Rovina ρ se protne s osou *y* v bodě $Y[0;6;0]$.

Pedagogická poznámka: Na následující příklad je třeba alespoň 25 minut. Hlavně první způsob řešení je pro studenty značně obtížný, takže minimálně začátek, kdy se zapisují souřadnice bodu *P* je třeba napsat na tabuli.

Př. 3: Urči vzdálenost bodu $A[-2;5;-4]$ od přímky $p: \{[-3+4t;-2+t;3-t], t \in R\}$.

Vzdálenost bodu od přímky = vzdálenost bodu od paty kolmice, která z něj vede na danou přímku.
Problém: Jak najdeme kolmici? V prostoru je směrů kolmých na přímku nekonečně mnoho a my musíme najít ten správný, kterým se z bodu trefíme do přímky.
$\Rightarrow$ Zkusíme rovnou hledat patu kolmice *P*. Víme:

- *P* leží na přímce *p*. $\Rightarrow$ $P[-3+4t;-2+t;3-t]$
- Vektor $A-P$ je kolmý na směrový vektor přímky *p*. $\Rightarrow$ $(A-P)\cdot \boldsymbol{u}_p = 0$

$A-P = (-2-[-3+4t];5-[-2+t];-4-[3-t]) = (1-4t;7-t;t-7)$
$(A-P)\cdot \boldsymbol{u}_p = (1-4t;7-t;t-7)\cdot(4;1;-1) = 0$
$(1-4t)\cdot 4 + (7-t)\cdot 1 + (t-7)(-1) = 0$
$4-16t+7-t+7-t=0$
$18 = 18t$
$t = 1$
Určíme souřadnice bodu *P*: $P[-3+4\cdot 1;-2+1;3-1] \Rightarrow P[1;-1;2]$.
Určíme vzdálenost bodů *AP*:
$AP = \sqrt{(-2-1)^2 + (5-(-1))^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{3^2+6^2+(-6)^2} = 9$.
Vzdálenost bodu *A* od přímky *p* je 9.

Jiný přístup:
Přímek kolmých na přímku *p* vycházejících z paty kolmice *P* je nekonečně mnoho (a jen jedna prochází bodem *A*), ale rovina, která je kolmá na *p* a prochází bodem *P*, je pouze jediná (a určitě prochází i bodem *A*). $\Rightarrow$ Najdeme rovnici roviny, která je kolmá na přímku a prochází bodem *A*, její průsečík s přímkou *p* je pata kolmice *P*.
$p: \{[-3+4t;-2+t;3-t], t \in R\} \Rightarrow \boldsymbol{u}_p = (4;1;-1) = \boldsymbol{n}_\rho$
$\Rightarrow$ Rovnice roviny ρ: $4x + y - z + d = 0$.
Dosadíme bod $A[-2;5;-4]$: $4x+y-z+d = 4\cdot(-2)+5-(-4) = 0 \Rightarrow d = -1$.
Rovina ρ kolmá na *p* procházející bodem *A*: $4x + y - z - 1 = 0$.
Hledáme průsečík roviny $\rho: 4x+y-z-1=0$ s přímkou $p: \{[-3+4t;-2+t;3-t], t \in R\}$:
$4(-3+4t)+(-2+t)-(3-t)-1=0$
$-12+16t-2+t-3+t-1=0$

$18t = 18$
$t = 1$
Dál už je postup stejný.
Určíme souřadnice bodu *P*: $P[-3+4\cdot 1;-2+1;3-1] \Rightarrow P[1;-1;2]$.
Určíme vzdálenost bodu *AP*:
$AP = \sqrt{(-2-1)^2 + (5-(-1))^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-6)^2} = 9$
Bod *A* je od přímky *p* vzdálen o 9.

Př. 4: Na přímce $p = \{[1+k;2+k;2k]; k \in R\}$ najdi bod, který je od přímky $q = \{[2+t;3;1-t]; t \in R\}$ vzdálený 3.

Stejný příklad jako předchozí – určujeme vzdálenost bodu od přímky, ale neznáme souřadnice bodu, známe vzdálenost $\Rightarrow$ budeme postupovat jako v předchozím příkladu, celou dobu budeme mít souřadnice hledaného bodu $P[1+k;2+k;2k]$ napsané pomocí parametru a teprve na konci postupu po dosazení do rovnice pro vzdálenost hodnotu parametru určíme.
Použijeme pomocnou kolmou rovinu.
Bod $P[1+k;2+k;2k]$.
Normálový vektor roviny kolmé na přímku *q*: $\boldsymbol{n}_\rho = (1;0;-1) \Rightarrow$ rovnice $x - z + d = 0$.
Dosadíme bod $P[1+k;2+k;2k]$: $(1+k) - 2k + d = 0 \Rightarrow d = k - 1$.
Rovnice kolmé roviny: $x - z + k - 1 = 0$.
Průsečík roviny s přímkou *q*: $(2+t) - (1-t) + k - 1 = 0$
$2 + t - 1 + t + k - 1 = 0$
$2t = -k$
$t = -\frac{k}{2}$
Souřadnice bodu *Q* (pata kolmice na přímku *q*): $Q[2+t;3;1-t] \Rightarrow Q\left[2-\frac{k}{2};3;1+\frac{k}{2}\right]$.
$|PQ| = 3$
$\sqrt{\left[(1+k)-\left(2-\frac{k}{2}\right)\right]^2 + \left[(2+k)-3\right]^2 + \left[2k-\left(1+\frac{k}{2}\right)\right]^2} = 3 \quad /^2$
$\left(\frac{3}{2}k-1\right)^2 + (k-1)^2 + \left(\frac{3}{2}k-1\right)^2 = 9$
$\frac{9}{4}k^2 - 3k + 1 + k^2 - 2k + 1 + \frac{9}{4}k^2 - 3k + 1 = 9$
$\frac{9}{2}k^2 + k^2 - 8k = 6 \quad / \cdot 2$
$9k^2 + 2k^2 - 16k - 12 = 0$
$11k^2 - 16k - 12 = 0$
$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4\cdot 11\cdot(-12)}}{2\cdot 11} = \frac{16 \pm 28}{22}$

$k_1 = k_{1,2} = \frac{16+28}{22} = 2 \Rightarrow P_1[1+2;2+2;2\cdot 2] \Rightarrow P_1[3;4;4]$

$k_2 = k_{1,2} = \frac{16-28}{22} = -\frac{6}{11} \Rightarrow P_2\left[1+\left(-\frac{6}{11}\right);2+\left(-\frac{6}{11}\right);2\cdot\left(-\frac{6}{11}\right)\right] \Rightarrow P_2\left[\frac{5}{11};\frac{16}{11};-\frac{12}{11}\right]$

Zadání splňují body $P_1[3;4;4]$ a $P_2\left[\frac{5}{11};\frac{16}{11};-\frac{12}{11}\right]$.

Př. 5: Petáková:
strana 119/cvičení 58
strana 119/cvičení 59
strana 120/cvičení 60 a)
strana 120/cvičení 61
strana 120/cvičení 65

Shrnutí: